

## CAPÍTULO 8

## DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

## 8.1 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Al derivar una función cualquiera  $y = f(x)$  se genera otra función  $y' = g(x)$ , como por ejemplo en el caso de que  $y = x^2$ , al derivarla se obtiene la nueva función  $y' = 2x$  que se llama la *primera derivada*. De hecho, todo el trabajo realizado hasta este momento en el presente curso ha estado encaminado a obtener la primera derivada.

Pero la primera derivada se puede volver a derivar, generándose una nueva función llamada ahora la *segunda derivada*; y si ésta última se vuelve a derivar, se obtiene la *tercera derivada*, y así sucesivamente.

Como el símbolo del operador derivada es  $\frac{d}{dx}$ , entonces el símbolo de la segunda derivada, o sea de la derivada de la derivada es  $\frac{d^2}{dx^2}$ . Si la variable *ye* es la que se deriva dos veces, la simbología que le corresponde es

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

La segunda derivada es la derivada de la derivada, no la derivada *por* la derivada. Son cosas diferentes. Por ejemplo, si  $y = x^3$ , entonces la primera derivada es  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ . En la siguiente tabla se muestra la diferencia entre lo que resulta de la derivada de la derivada y de la derivada por la derivada:

Derivada de la derivada:	$\frac{d}{dx} 3x^2 = 6x$
Derivada por derivada:	$(3x^2)(3x^2) = 9x^4$

Si, por ejemplo,  $y = x^3$ , su primera derivada también se puede escribir con un apóstrofo simple; la segunda derivada con doble apóstrofo, y así sucesivamente.

primera derivada:	$y' = 3x^2$
segunda derivada:	$y'' = 6x$

Todo lo antes dicho es aplicable para la tercera derivada, la cuarta derivada, etc.

**Ejemplo 1:** Obtener la segunda derivada de la función  $y = 5x^2 - 7x + 13$ .

**Solución:** La primera derivada es  $\frac{dy}{dx} = 10x - 7$

La segunda derivada se obtiene derivando la primera derivada, es decir

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (10x - 7)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 10$$

**Ejemplo 2:** Calcular la segunda derivada de la función  $y = (5x + 2)^4$

**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = 4(5x + 2)^3 \frac{d}{dx} (5x + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 20(5x + 2)^3 \quad (\text{primera derivada})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [20(5x + 2)^3]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 20 \left[ 3(5x + 2)^2 \frac{d}{dx} (5x + 2) \right]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 300(5x + 2)^2 \quad (\text{segunda derivada})$$

**Ejemplo 3:** Calcular la segunda derivada de la función  $y = \frac{2}{4 - 7x}$

**Solución:**

$$y = 2(4 - 7x)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \left[ (-1)(4 - 7x)^{-2} \frac{d}{dx} (4 - 7x) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 14(4 - 7x)^{-2} \quad (\text{primera derivada})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [14(4 - 7x)^{-2}]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 14 \left[ (-2)(4-7x)^{-3} \frac{d}{dx}(4-7x) \right]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 196(4-7x)^{-3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{196}{(4-7x)^3} \quad (\text{segunda derivada})$$

**Ejemplo 4:** Calcular la segunda derivada de la función  $y = 4\sqrt{12x+11}$

**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \frac{d}{dx}(12x+11)}{2\sqrt{12x+11}} \quad (\text{fórmula de la raíz cuadrada})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(12)}{2\sqrt{12x+11}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24}{\sqrt{12x+11}} \quad (\text{primera derivada})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 24 \frac{d}{dx}(12x+11)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 24 \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) (12x+11)^{-3/2} \frac{d}{dx}(12x+11) \right]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 24 \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) (12x+11)^{-3/2} (12) \right]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-144}{(12x+11)^{3/2}} \quad (\text{segunda derivada})$$

**Ejemplo 5:** Calcular la tercera derivada de la función  $y = \text{sen } 6x$ .

**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = 6 \cos 6x \quad (\text{primera derivada})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -36 \operatorname{sen} 6x \quad (\text{segunda derivada})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -216 \operatorname{cos} 6x \quad (\text{tercera derivada})$$

**Ejemplo 6:** Obtener la segunda derivada de la función  $y = 13x + 12$

**Solución:**  $\frac{dy}{dx} = 13 \quad (\text{primera derivada})$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(13)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (\text{segunda derivada})$$

**EJERCICIO 8.1**

Calcular la segunda derivada de las siguientes funciones:

1)  $y = 4x^6 + 11x^5 - 7x^3 - x + 9$

3)  $y = \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x - 1$

5)  $y = \cos 8x$

7)  $y = \frac{10}{(2x-7)^3}$

9)  $y = \frac{\sqrt{3x+13}}{8}$

2)  $y = 7x - 8$

4)  $y = (5x - 8)^7$

6)  $y = \frac{x^2}{2} + \pi x$

8)  $y = \frac{3}{x^2 - 5}$

10)  $y = \frac{6}{\sqrt{6x+6}}$